ALA-c 2006

RÄKNEÖVNING — VECKA 3

David Heintz, 8 februari 2006

Innehåll

1 Vektorvärda funktioner av flera reella variabler

1.1 Uppgift 2

Avgör om följande funktioner är Lipschitzkontinuerliga på den öppna mängden $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < 1\}$ *och bestäm i förekommande fall Lipschitzkonstanten.*

Minns att $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är Lipschitzkontinuerlig i $\mathbb{R}^n$ om det finns en konstant $L > 0$ så att

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

där L kallas Lipschitzkonstanten [AMBS, ekv. 54.1]. Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en Lipschitzkontinuerlig funktion följer också från *medelvärdessatsen* [AMBS, avs. 54.8]

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |(\nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x} - \mathbf{y})|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

där $\bar{\mathbf{x}}$ är en punkt på linjesegmentet mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.

Anmärkning. En funktion som är k gånger differentierbar med kontinuerliga derivator kallas för $\mathcal{C}^k$-funktion. Ovan tillhör f m.a.o. åtminstone klassen $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. ■

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{x}) = \sin(\|\mathbf{x}\|^2)$

Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sin\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\right) = 2x_1 \cos(\|\mathbf{x}\|^2),$$

och får samma sätt övriga partiella derivator. Gradienten blir därför

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 2\cos(\|\mathbf{x}\|^2)\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 2\cos(\|\mathbf{x}\|^2)\mathbf{x}^T.$$

Nu fås från (2) först

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |(\nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x} - \mathbf{y})| = 2|\cos(\|\bar{\mathbf{x}}\|^2)||\bar{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x} - \mathbf{y})|,$$

och via Cauchy-Schwarz olikhet

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = |\mathbf{a}^T\mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

sedan att

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \underbrace{2|\cos(\|\bar{\mathbf{x}}\|^2)|}_{\leq 2}\underbrace{\|\bar{\mathbf{x}}\|}_{\leq 1}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Alltså är f Lipschitzkontinuerlig med $L = 2$.

c) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \sin(\|\mathbf{x}\|^2) \end{pmatrix}$

Vi skriver VL från (1) som

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| = \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \left(\sin(\|\mathbf{x}\|^2) - \sin(\|\mathbf{y}\|^2)\right)^2\right)^{1/2},$$

där det i förra uppgiften blev känt att

$$\left(\sin(\|\mathbf{x}\|^2) - \sin(\|\mathbf{y}\|^2)\right)^2 \leq (2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)^2 = 4\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2,$$

och eftersom $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ följer

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + 4\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2\right)^{1/2} = \sqrt{5}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

så att f är Lipschitzkontinuerlig med $L = \sqrt{5}$. □

1.2 Uppgift 5

Bestäm determinanten för Jacobimatrisen av funktionen.

b) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = x_1 e^{x_2}\begin{pmatrix} \cos(x_3) & \sin(x_3) & 1 \end{pmatrix}^T$

Jacobimatrisen är

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = e^{x_2}\begin{pmatrix} \cos(x_3) & x_1\cos(x_3) & -x_1\sin(x_3) \\ \sin(x_3) & x_1\sin(x_3) & x_1\cos(x_3) \\ 1 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

För $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ med kolonnvektorer $\mathbf{a}_i$ samt $\alpha \in \mathbb{R}$ minns följande räkneregler (två av flera) för determinanter:

(i) $\det\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \ldots & \mathbf{a_n} \end{pmatrix} = \alpha\det(\mathbf{A})$,

(ii) om två kolonner (eller rader) är lika är $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Nu fås den sökta determinanten

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J}(\mathbf{x})) &\overset{(i)}{=} e^{3x_2}\begin{vmatrix} \cos(x_3) & x_1\cos(x_3) & -x_1\sin(x_3) \\ \sin(x_3) & x_1\sin(x_3) & x_1\cos(x_3) \\ 1 & x_1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\overset{(i)}{=} x_1 e^{3x_2}\begin{vmatrix} \cos(x_3) & \cos(x_3) & -x_1\sin(x_3) \\ \sin(x_3) & \sin(x_3) & x_1\cos(x_3) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\overset{(ii)}{=} 0, \end{aligned}$$

eftersom kolonn 1 och 2 är lika. □

1.3 Uppgift 6

Bestäm Taylorpolynomet av andra ordningen i punkten $\bar{\mathbf{x}} = (0,\ 0,\ 0) = \mathbf{o}^T$ *för funktionen.*

Taylorpolynomet $P_2(\mathbf{x})$ ges av [AMBS, avs. 54.14]

$$P_2(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + (\nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \tag{3}$$

där

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix},$$

är *Hessianmatrisen* (innehåller samtliga partiella derivator av andra ordningen för en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

d) $\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} = \mathrm{e}^{-\|\mathbf{x}\|^2}$

Från (3) beräknas i ordning

$$\begin{aligned} f(\bar{\mathbf{x}}) &= \mathrm{e}^0 = 1, \\ \nabla f(\mathbf{x}) &= -2\mathrm{e}^{-\|\mathbf{x}\|^2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \implies \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{o}^T, \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= 4\mathrm{e}^{-\|\mathbf{x}\|^2} \begin{pmatrix} x_1^2 - \frac{1}{2} & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_1 x_2 & x_2^2 - \frac{1}{2} & x_2 x_3 \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_3^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anmärkning. Notera att derivationsordningen normalt inte har någon betydelse, dvs. att de blandade partiella derivatorna är lika, så att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Alltså är Hessianen symmetrisk (här t.o.m. diagonal: $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}) = -2\mathbf{I}$). ■

Återstår endast insättning

$$P_2(\mathbf{x}) = 1 + (\mathbf{o}, \mathbf{x}) + \tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{x}}^T(-2\mathbf{I})\mathbf{x} = 1 - \|\mathbf{x}\|^2,$$

och vi är klara. □

2 Nivåkurvor, -ytor och gradienten

2.1 Uppgift 1

Rita ytorna i $\mathbb{R}^3$. Bestäm tangentplan till ytorna i olika punkter.

a) $\quad \Gamma = \{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$

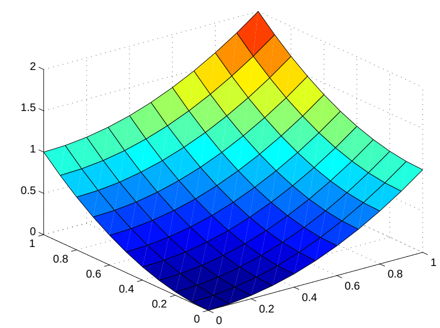
I MATLAB kan vi skriva

```
% Genererar mesh:
[x1,x2] = meshgrid(0:1e-1:1);

% Evaluerar funktionen i varje meshpunkt:
x3 = x1.^2 + x2.^2;

% Plottar ytan:
surf(x1,x2,x3)
```

vilket ger följande yta över enhetskvadraten



Figur 1: Funktionsytan $x_3 = x_1^2 + x_2^2$

Tangentplanet $\tilde{f}(\mathbf{x})$ till en yta $f(\mathbf{x})$ i en punkt $\bar{\mathbf{x}}$ ges av

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + (\nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \tag{4}$$

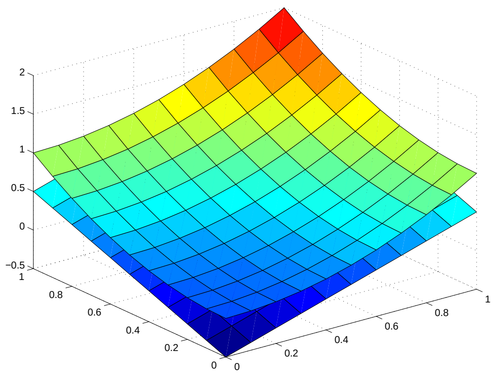
dvs. samma approximation som i (3) bortsett den kvadratiska termen. För t.ex. $\bar{\mathbf{x}} = (1/2,\ 1/2)$ fås

```
% Genererar mesh:
[x1,x2] = meshgrid(0:1e-1:1);

% Evaluerar funktionen i varje meshpunkt:
x3 = x1.^2 + x2.^2;
f_tilde = x1 + x2 -.5;

% Plottar ytan:
surf(x1,x2,x3)
hold on
surf(x1,x2,f_tilde)
```

och



Figur 2: Tangentplanet $\tilde{f}(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \frac{1}{2}$ till x_3 i $\bar{\mathbf{x}} = (1/2,\ 1/2)$

□

2.2 Uppgift 2

Finn parametriseringar av kurvorna som skär ytorna från förra uppgiften längs med planet $x_3 = 1$.

a) $x_3 = x_1^2 + x_2^2$

Med den givna skärningen fås nivåkurvan

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

vilket betyder att ytan och planet korsas i en cirkel med centrum i origo samt radien $r = 1$. Vi representerar kurvan på *parameterform*: Med en frihetsgrad — parametern $t \in \mathbb{R}$ — återges kurvan och dess orientering. Vi får en funktion $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(t) = \cos(t), \\ x_2 = r\sin(t) = \sin(t), \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

eller

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Med t växande från 0 till 2π fås att kurvan genomlöps moturs.

Anmärkning. Notera parameterframställningen inte är unik. Exempelvis är

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1,$$

identisk med ovan. ■

□

2.3 Uppgift 4

Beräkna gradienterna av följande funktioner $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

c) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Vi får

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}^T.$$

d) $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$

Den partiella derivatan m.a.p. x_1 är

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} \cdot 2x_1 = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} x_1,$$

och på liknande vis bestäms övriga partiellla derivator. Alltså blir gradienten

$$\nabla f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x}^T.$$

□

2.4 Uppgift 7

Bestäm tangent och normalvektor till ellipsen $x_1^2 + 3x_2^2 = 10$ *i punkten* $\bar{\mathbf{x}} = (1,\ \sqrt{3})$.

Vi diskuterar först kort gradientens geometriska betydelse. Låt därför $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en $\mathcal{C}^1$-funktion med nivåkurva

$$f(x_1, x_2) = C,$$

och antag vidare att samma nivåkurva har en parameterframställning

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Nu är $f(\mathbf{x}(t)) = C$ och $f'_t(\mathbf{x}(t)) = 0$ för alla t på parameterintervallet. Derivatan m.a.p. t kan även skrivas (använd kedjeregeln)

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x}'(t)) = 0,$$

som säger att gradienten är ortogonal mot nivåkurvans tangent (och om $\nabla f(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}'(t)$ blir $\nabla f(\mathbf{x})$ också en normalvektor till nivåkurvan).

Nu till uppgiften: Kontrollera först att $\bar{\mathbf{x}}$ ligger på kurvan genom insättning

$$f(\bar{\mathbf{x}}) = 1^2 + 3(\sqrt{3})^2 = 10,$$

vilket var fallet. Sedan, med ellipsen som nivåkurva till $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2$, blir normalvektorn $\mathbf{n}$ lika med gradienten i punkten $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 6x_2 \end{pmatrix} \implies \mathbf{n} = \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 2 & 6\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Anmärkning. Man kan visa att gradienten pekar i den riktning funktionen f växer snabbast med maximal tillväxt $\|\nabla f\|$. (Tips: Använd Cauchy-Schwarz olikhet i formeln för riktningsderivatan: $f'_{\mathbf{v}} = (\nabla f, \mathbf{v})$ — kom ihåg att $\mathbf{v}$ är normerad riktning.) ■

Eftersom normalen, eller som vi såg gradienten, är ortogonal mot tangenten ges dess ekvation i punkten $\bar{\mathbf{x}}$ av

$$(\mathbf{n}, \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = (\nabla f(\bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = 2(x_1 - 1) + 6\sqrt{3}(x_2 - \sqrt{3}) = 0,$$

eller förkortat

$$x_1 + 3\sqrt{3}x_2 = 10.$$

□