ALA-c 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 6

David Heintz, 6 mars 2005

Innehåll

1 Kapitel 64

1.1 Variabelsubstitution

Först en anmärkning beträffande variabelsubstitution. Det är något vi gör för att förenkla vårt problem. Avsikten är att få lättare integraler att lösa (integranden och/eller integrationsområdet förenklas).

Om vi ska bestämma integralen

$$\int_{\Omega} f(x)\, dx, \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

och tror oss dra nytta av en variabelsubstitution, låt oss säga $x = g(y)$, bestäms den nya integranden till $f(g(y))$ genom insättning. Bytet medför också att det gamla området Ω övergår i ett nytt $\tilde{\Omega}$. Vi måste därför ta reda på såväl integrationsgränser som hur stort det lokala areaelementet blir. Det senare fås av

$$dx = \left|\det\left(\frac{dx}{dy}\right)\right| dy,$$

så att den ursprungliga integralen övergår i

$$\int_{\Omega} f(x)\, dx = \int_{\tilde{\Omega}} f(g(y)) \left|\det\left(\frac{dx}{dy}\right)\right|\, dy,$$

där $\frac{dx}{dy}$ är Jacobimatrisen för avbildningen $y \to x$ (determinanten för dess absolutbelopp anger hur det lokala areaelementet ändras vid övergång från y-koordinaterna till $x-$koordinaterna).

EXEMPEL

Vi betraktar variabelsubstitutionen

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 \\ x_2 = y_1 + 2y_2 \end{cases},$$

och undrar hur det lokala areaelementet ändras i den linjära avbildningen $y \to x$. På matrisform kan skrivas

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} y_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} y_2, \end{aligned}$$

där vektorerna (1, 0) och (0, 1) utgör en bas för x_1x_2-planet, medan (2, 1) och (0, 2) på samma vis är en bas för y_1y_2-planet. Ett litet areaelement i x_1x_2-planet ges därför av absolutbeloppet av kryssprodukten

$$\left|\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta x_1\right) \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta x_2\right)\right| = \Delta x_1 \Delta x_2,$$

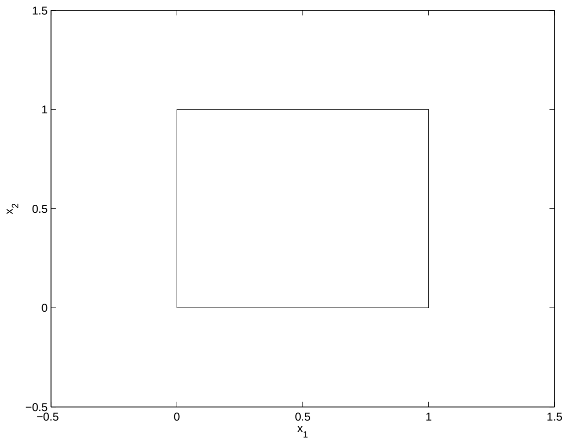
vilket motsvaras av

$$\left|\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta y_1\right) \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Delta y_2\right)\right| = 4\Delta y_1 \Delta y_2,$$

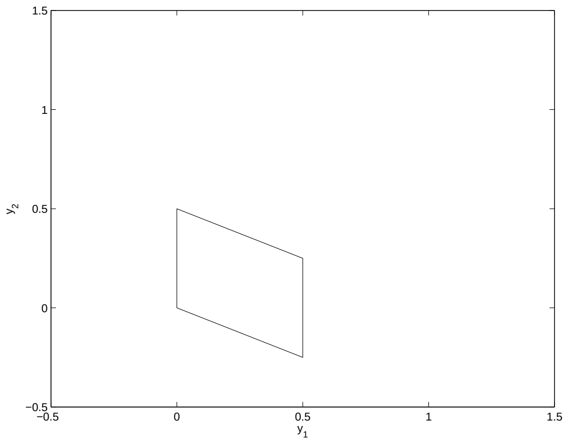
vilket gör det rimligt att $dx_1 dx_2 = 4 dy_1 dy_2$. Precis samma förhållande fås genom att istället bestämma

$$\frac{d(x_1, x_2)}{d(y_1, y_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det\left(\frac{d(x_1, x_2)}{d(y_1, y_2)}\right) = 4,$$

eftersom absolutbeloppen av determinanten för en 2×2-matris och kryssprodukten mellan dess rad- eller kolonnvektorer är lika. Detta resonemang, som leder fram sambandet $dx = \left|\det\left(\frac{dx}{dy}\right)\right| dy$, håller endast för linjära avbildningar. Likväl är det en indikation på riktigheten i detsamma.



Figur 1: Areaelementet $dx_1 dx_2$ är fyra gånger så stort som ...



Figur 2: ...areaelementet $dy_1 dy_2$

1.2 Uppgift 7

Evaluera

$$\int_\Omega \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{3/2} dx,$$

där Ω *är ellipsen* $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \leq 1\right\}$.

Med en elliptisk domän (halvaxlar a_1 och a_2 samt centrum i origo) ligger det nära till hands att införa elliptiska koordinater (medför en "lättare" rektangulär domän att integrera över)

$$\begin{cases} x_1 = a_1 r\cos(\theta) \\ x_2 = a_2 r\sin(\theta) \end{cases}, \qquad 0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

där areaskalningen ges av beloppet av funktionaldeterminanten

$$\begin{aligned} \frac{d(x_1, x_2)}{d(r,\theta)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\cos(\theta) & -a_1 r\sin(\theta) \\ a_2\sin(\theta) & a_2 r\cos(\theta) \end{bmatrix}, \\ \det\left(\frac{d(x_1, x_2)}{d(r,\theta)}\right) &= a_1a_2 r\cos^2(\theta) + a_1a_2r\sin^2(\theta) = a_1a_2r. \end{aligned}$$

Nu när det nya integrationsområdet och skalningen är kända, återstår insättning av de nya variablerna, vilket ger oss en ny integrand, samt lite "räknearbete":

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^{3/2} dx &= a_1a_2 \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1-r^2\right)^{3/2} r\, drd\theta \\ &= 2\pi a_1 a_2 \int_0^1 \left(1-r^2\right)^{3/2} r\, dr \\ &= 2\pi a_1a_2 \left[\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-r^2\right)^{5/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{2\pi a_1 a_2}{5}, \end{aligned}$$

där faktorn 2π i den andra likheten kommer från integralen $\int_0^{2\pi} d\theta$ (dubbelintegralen är separabel).

1.3 Uppgift 13

Beräkna följande dubbelintegraler genom variabelsubstitution.

(b) $\int_\Omega x_1x_2\, dx, \qquad \Omega = \left\{x : 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \leq 0\right\}$.

Första svårigheten är integrationsområdet. Det påminner om en ellips, bortsett från den extra termen $-2x_1$, och att olikheten är noll i högerledet. Vi prövar med kvadratkomplettering (förhoppningsvis klarnar situationen något):

$$3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \leq 0 \iff 3\left(x_1 - \frac{1}{3}\right)^2 + x_2^2 - \frac{1}{3} \leq 0 \iff 9\left(x_1 - \frac{1}{3}\right)^2 + 3x_2^2 \leq 1,$$

motsvarande en ellips med halvaxlar $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{\sqrt{3}}$, centrum i $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, samt radien 1. (Här avses radien som ingår i uttrycket för elliptiska koordinater. En ellips i sig har ingen radie, utan karakteriseras av sina halvaxlar a och b, när ellipsen är skriven på standardform, dvs. $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$.) Utskrivet får vi

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} r\cos(\theta) \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} r\sin(\theta) \end{cases}, \qquad 0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Övergång till elliptiska koordinater medför skalning av det lokala areaelementet motsvarande produkten mellan radien och de båda halvaxlarna

$$dx_1 dx_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} r dr d\theta$$

(konstanten $\frac{1}{3}$ försvinner vid derivation). Vi har med andra ord att lösa

$$\begin{aligned}
\int_\Omega x_1 x_2 \, dx &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} r\cos(\theta)\right) \frac{1}{\sqrt{3}} r\sin(\theta) r \, dr d\theta \\
&= \frac{1}{27} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^2\sin(\theta) + r^3 \sin(\theta)\cos(\theta)\right) \, dr d\theta \\
&= \frac{1}{27} \int_0^1 \underbrace{\left[-r^2\cos(\theta) + \frac{1}{2} r^3 \sin^2(\theta)\right]_0^{2\pi}}_{=0} \, dr,
\end{aligned}$$

vilket ger svaret noll (sinus och cosinus evalueras i samma punkt). Om man inser det tidigt sparar man eventuellt in det merarbete som följer av att inleda integrationen m.a.p. r.

2 Kapitel 65

2.1 Uppgift 8

Beräkna $\int_S dS$ *samt* $\int_S x_1x_2\, dS$*, med* $S = \{(y_1, y_2, y_1y_2) : 0 \leq y_1, y_2 \leq 1\}$.

Arean av en yta S i rummet fås genom att summera upp alla ytelement dS via integralen (*AMBS 65.1*)

$$A(S) = \int_S dS = \int_\Omega \|s_1' \times s_2'\|\, dy,$$

där $s = s(y)$ är en parametrisering av ytan ($s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$). I första deluppgiften söker vi med andra ord ytans area. Vi får här — med den givna parametriseringen — att ytelementet motsvaras av

$$\begin{aligned}
s(y) &= (y_1, y_2, y_1y_2) \implies \begin{cases} s_1' = (1, 0, y_2) \\ s_2' = (0, 1, y_1) \end{cases}, \\
s_1' \times s_2' &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & y_1 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_1 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 0 & y_1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-y_2, -y_1, 1), \\
\|s_1' \times s_2'\| &= \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \\
dS &= \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 1}\, dy_1dy_2,
\end{aligned}$$

och därmed integralen

$$A(S) = \int_S dS = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 1}\, dy_1dy_2$$

att lösa. Det är dessvärre svårt att bestämma en primitiv funktion till integranden. I BETA kan man läsa sig till att den borde vara

$$\int \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 1}\, dy_1 = \frac{1}{2}y_1\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 1} + \frac{y_2^2 + 1}{2} \ln \left| y_1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 1} \right| + C,$$

varför man gör bättre i att lösa integralen numeriskt (uppgift för era integralprogram i MATLAB). Att bestämma nästa primitiva funktion blir nämligen ännu värre. Vi lägger dock definitionen för area av en yta på minnet.

Innan vi ger oss i kast med nästa deluppgift tar vi reda på vad som egentligen menas med "ytintegral" (*AMBS 65.9*):

$$\int_S u\, dS = \int_\Omega u(s(y))\, \|s_1' \times s_2'\|\, dy,$$

vilket föranleder oss att skriva

$$\int_S x_1x_2\, dS = \int_0^1 \int_0^1 y_1y_2\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 1}\, dy_1dy_2.$$

Den här gången ser integranden mänskligare ut. Vi tar sats och räknar på:

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 y_1y_2\sqrt{y_1^2+y_2^2+1}\,dy_1dy_2 &= \int_0^1 y_2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(y_1^2+y_2^2+1\right)^{3/2}\right]_0^1 dy_2\\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 y_2\left[\left(y_2^2+2\right)^{3/2}-\left(y_2^2+1\right)^{3/2}\right]\,dy_2\\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\left(\left(y_2^2+2\right)^{5/2}-\left(y_2^2+1\right)^{5/2}\right)\right]_0^1\\
&= \frac{1}{15}\left(3^{5/2}-2^{5/2}-2^{5/2}+1\right)\\
&= \frac{1}{15}\left(9\sqrt{3}-8\sqrt{2}+1\right),
\end{aligned}$$

vilket gick betydligt lättare än i förra deluppgiften.

2.2 Uppgift 9

För $r>0$ och $h>0$ betrakta ytan

$$S=\{x: x=(r\cos(v),\, r\sin(v),\, z),\ 0\le v\le 2\pi,\ 0\le z\le h\}.$$

Beskriv S geometriskt. Ge parametriseringar av ytorna.

Vi ser att i x_1x_2-planet påminner parametriseringen om en cirkel. Tittar vi sedan i x_3-led är gränserna fixa, vilket innebär att ytan är en cylinder, med radien r och höjden h. Vid övergång till cylindriska koordinater följer att

$$\begin{aligned}
s &= s(v,z)=(r\cos(v),\, r\sin(v),\, z) \implies \begin{cases} s'_v=(-r\sin(v),\, r\cos(v),\, 0)\\ s'_z=(0,\,0,\,1)\end{cases},\\
s'_v\times s'_z &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ -r\sin(v) & r\cos(v) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\\
&= e_1\begin{vmatrix} r\cos(v) & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix} -r\sin(v) & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} + e_3\begin{vmatrix} -r\sin(v) & r\cos(v)\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\
&= (r\cos(v),\, r\sin(v),\, 0),\\
\|s'_v\times s'_z\| &= \sqrt{r^2\cos^2(v)+r^2\sin^2(v)}=r,\\
dS &= r\,dvdz,
\end{aligned}$$

där vi märker att radien — som är konstant — inte är någon parameter.

(b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}^3 : x_2^2+x_3^2=4,\ |x_1|\le 5\right\}$

Här har vi ett typexempel på en cylinder. En liggande sådan (i x_1-led). Hur ser parametriseringen ut? Förmodligen ungefär som ovan, fast med ”omkastade” koordinataxlar. Tänker man sig att vrida x_1-axeln i höjdled (givet högerorienterade koordinataxlar), placeras x_2-axeln i x_1:s gamla riktning, medan x_2 "ersätts" av x_3-axeln. Således blir parametriseringen av ytan

$$\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = r\cos(v) \\ x_3 = r\sin(v) \end{cases}, \qquad -5 \leq z \leq 5, \qquad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

med den konstanta radien $r = 2$.

2.3 Uppgift 11

Beräkna $\int_S (x_1,\, x_2,\, x_3) \cdot n\, dS$, *om* S *är randen till det kompakta området*

$$\Omega = \{x : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1,\, 2,\, 3\}$$

.

Nu är det dags att lösa flödesintegraler. Närmare bestämt flödet genom randen till enhetstetraedern med hörn i punkterna $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ samt $(0, 0, 1)$. Det finns åtminstone två sätt att lösa uppgiften på:

- genom definitionen av ytintegral
- utnyttja divergenssatsen

Vi betar av dem båda i tur och ordning. Enligt definitionen gäller att

$$\int_S u \cdot n\, dS = \int_\Omega u(s(y)) \cdot \left(s_1' \times s_2'\right)\ dy_1 dy_2,$$

eftersom en enhetsnormal till S ges av $n = \frac{s_1' \times s_2'}{\|s_1' \times s_2'\|}$ (vi hade sedan att $dS = \|s_1' \times s_2'\| dy_1 dy_2$). För att använda definitionen måste vi dessvärre bestämma fyra flödesintegraler — integrationsområdet består ju av lika många delytor. Det hela blir som väl är inte riktigt så jobbigt. Med $u(x) = x$ skriver vi

$$\int_S x \cdot n\, dS = \sum_{i=1}^{4} \int_{S_i} x \cdot n_i\, dS,$$

och följer upp med att bestämma de fyra delintegralerna (märk att normalvektorerna ska vara utåtriktade).

Delyta 1: $x_1 = 0$

$$\begin{cases} x &= (0,\, x_2,\, x_3) \\ n_1 &= (-1,\, 0,\, 0) \end{cases} \implies x \cdot n_1 = (0,\, x_2,\, x_3) \cdot (-1,\, 0,\, 0) = 0,$$

$$\int_{S_1} x \cdot n_1\, dS = 0.$$

Delyta 2: $x_2 = 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & (x_1,\, 0,\, x_3) \\ n_2 & = & (0,\, -1,\, 0) \end{array}\right. \implies x \cdot n_2 = (x_1,\, 0,\, x_3) \cdot (0,\, -1,\, 0) = 0,$$

$$\int_{S_2} x \cdot n_2 \, dS = 0.$$

Delyta 3: $x_3 = 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & (x_1,\, x_2,\, 0) \\ n_3 & = & (0,\, 0,\, -1) \end{array}\right. \implies x \cdot n_3 = (x_1,\, x_2,\, 0) \cdot (0,\, 0,\, -1) = 0,$$

$$\int_{S_3} x \cdot n_3 \, dS = 0.$$

Delyta 4: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

En parametrisering av ytan är $s(y) = (y_1,\, y_2, 1 - y_1 - y_2)$, med $s_1' = (1,\, 0,\, -1)$ och $s_2' = (0,\, 1,\, -1)$, samt

$$s_1' \times s_2' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,\, 1,\, 1),$$

så att

$$\int_{S_4} x \cdot n_4 \, dS = \int_{\Omega_4} (y_1,\, y_2,\, 1 - y_1 - y_2) \cdot (1,\, 1,\, 1) \, dy = \int_{\Omega_4} dy.$$

Vi ser att uppgiften reduceras till att bestämma arean av parameterdomänen Ω_4. Eftersom ytan S_4 har hörn i punkterna $(1,\, 0,\, 0)$, $(0,\, 1,\, 0)$ och $(0,\, 0,\, 1)$, motsvaras Ω_4 av triangeln med hörn i punkterna $(1,\, 0)$, $(0,\, 1)$ samt $(0,\, 0)$ (tänk bort höjdled, dvs. sätt $x_3 = 0$, för att få projektionen). Det inses egentligen direkt att arean är $\frac{1}{2}$ (basen och höjden är 1), men ändå har vi att

$$\int_{\Omega_4} dy = \int_0^1 \int_0^{1-y_1} dy_2 dy_1 = \int_0^1 (1 - y_1) dy_1 = \left[y_1 - \frac{1}{2} y_1^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Varför nu envisas med divergenssatsen — det gick ju fint att använda definitionen? Visst, men om de tre första integranderna varit nollskilda, hade vi fått det betydligt kämpigare. Ibland erbjuder divergenssatsen en smidig genväg till lösningen, genom att överföra flödesintegralen från randen till en multipelintegral över området

$$\int_S u \cdot n \, dS = \int_D \nabla \cdot u \, dx,$$

förutsatt att fältet u är en $\mathcal{C}^1$-funktion. Integrationsområdet D måste även vara kompakt, dvs. slutet och begränsat. I vårt fall är det inga hinder. Tetraedern begränsas av $0 \leq x_3 \leq$

$1 - x_1 - x_2$, $0 \leq x_2 \leq 1 - x_1$ (sätt $x_3 = 0$ för att erhålla den övre gränsen i termer av x_1) samt $0 \leq x_1 \leq 1$. Med $u = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ följer att $\nabla \cdot u = 3$ varför

$$\begin{aligned}
\int_S u \cdot n \, dS &= 3\int_D dx = 3\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 dx_2 dx_1 \\
&= 3\int_0^1 \int_0^{1-x_1} (1 - x_1 - x_2)\, dx_2 dx_1 = 3\int_0^1 \left[(1-x_1)x_2 - \frac{1}{2}x_2^2\right]_0^{1-x_1} dx_1 \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 (1-x_1)^2 \; dx_1 = \frac{3}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-x_1)^3\right]_0^1 = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

vilket är samma resultat som tidigare. Vi noterar dessutom att arean av enhetstetraedern tydligen är $\frac{1}{6}$.

3 Kapitel 66

3.1 Uppgift 4

Beräkna, med domäner Ω som i Figur 66.4, integralen $\int_\Omega (1-x_2)\,dx$.

Till att börja med måste vi specificera domänen. Vi ska titta på Figur 2, den liggande konen i x_2-led, som exempelvis återges genom

$$\Omega = \left\{ x : 0 \leq x_3^2 + x_1^2 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1 - \sqrt{x_3^2 + x_1^2} \right\},$$

eftersom bottenytans radie är 1, och maximala höjden avtar linjärt mot densamma. Det verkar lämpligt att införa cylindriska koordinater enligt

$$\begin{cases} x_1 = r\sin(\theta) \\ x_2 = z \\ x_3 = r\cos(\theta) \end{cases}, \qquad 0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad 0 \leq z \leq 1 - r,$$

där radien ingår som parameter (i en tidigare uppgift använde vi samma koordinater för att beskriva en cylinders mantelyta med konstant radie). Funktionaldeterminanten för avbildningen $(r,\,\theta,\,z) \to (x_1,\,x_2,\,x_3)$ ges av

$$\begin{aligned} \frac{d(x_1,x_2,x_3)}{d(r,\theta,z)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}, \\ \det\left(\frac{d(x_1,x_2,x_3)}{d(r,\theta,z)}\right) &= r\sin^2(\theta) + r\cos^2(\theta) = r, \end{aligned}$$

(utveckla determinanten efter rad 2) och vi har att lösa integralen

$$\begin{aligned} \int_\Omega (1-x_2)\,dx &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-r} (1-z)r\ dz d\theta dr = 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-r} (1-z)r\ dzdr \\ &= 2\pi \int_0^1 r\left[z - \frac{1}{2}z^2\right]_0^{1-r} dr = \pi \int_0^1 r(1-r^2)\,dr = \pi\left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Svaret i facit till AMBS är felaktigt.

3.2 Uppgift 7

Beräkna multipelintegralerna över $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\right\}$.

(a) $\int_\Omega x\ dx$

Den här uppgiften ser lite lustig ut med integranden som en vektor, men det innebär helt enkelt att vi får integrera komponentvis. Vad som också är nytt är integrationsområdet. Det ges av ett klot med radien 1. Av den anledningen byter vi till sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x_1 = r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ x_2 = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ x_3 = r\cos(\varphi) \end{cases}, \qquad 0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \varphi \le \pi, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

en avbildning $(r,\, \theta,\, \varphi) \to (x_1,\, x_2,\, x_3)$ med funktionaldeterminanten

$$\begin{aligned}
\frac{d(x_1,x_2,x_3)}{d(r,\theta,\varphi)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi) & 0 & -r\sin(\varphi) \end{bmatrix}, \\
\det\left(\frac{d(x_1,x_2,x_3)}{d(r,\theta,\varphi)}\right) &= \cos(\varphi)\begin{vmatrix} -r\sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) \end{vmatrix} \\
&\quad -r\sin(\varphi)\begin{vmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) \end{vmatrix} \\
&= \cos(\varphi)\left(-r^2\sin(\varphi)\sin^2(\theta)\cos(\varphi) - r^2\cos(\varphi)\cos^2(\theta)\sin(\varphi)\right) \\
&\quad -r\sin(\varphi)\left(r\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta) + r\sin^2(\varphi)\sin^2(\theta)\right) \\
&= -r^2\sin(\varphi)\underbrace{\left(\cos^2(\varphi)\sin^2(\theta) + \cos^2(\varphi)\cos^2(\theta)\right)}_{=\cos^2(\varphi)} \\
&\quad -r^2\sin(\varphi)\underbrace{\left(\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta) + \sin^2(\varphi)\sin^2(\theta)\right)}_{=\sin^2(\varphi)} \\
&= -r^2\sin(\varphi)\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) \\
&= -r^2\sin(\varphi),
\end{aligned}$$

där vi sedan ska byta tecken (areaskalningen ges ju av funktionaldeterminantens absolutbelopp). Vi ska alltså bestämma de tre integralerna

$$\begin{aligned}
\int_\Omega x_1\ dx &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3\sin^2(\varphi)\cos(\theta)\ drd\theta d\varphi, \\
\int_\Omega x_2\ dx &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3\sin^2(\varphi)\sin(\theta)\ drd\theta d\varphi, \\
\int_\Omega x_3\ dx &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2\sin^2(\varphi)\cos(\varphi)\ drd\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

De är alla separabla, och det inses nästan genast att åtminstone de två första är noll, eftersom

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\ d\theta &= [\sin(\theta)]_0^{2\pi} = 0, \\
\int_0^{2\pi} \sin(\theta)\ d\theta &= [-\cos(\theta)]_0^{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

då sinus och cosinus ska evalueras i samma punkt (funktionerna är lika mycket positiva som negativa över en period). Att även den tredje komponenten blir noll ges av

$$\int_0^{\pi} \sin^2(\varphi)\cos(\varphi)\, d\varphi = \left[\frac{1}{3}\sin^3(\varphi)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}(0-0) = 0,$$

och svaret blir (0, 0, 0) (nollvektorn).

(b) $\int_\Omega \|x\|\, dx$

Med vårt klot till integrationsområde använder vi återigen sfäriska koordinater. Med dessa samt areaskalningen från föregående uppgift erhålles

$$\int_\Omega \|x\|\, dx \quad = \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^3 \sin(\varphi)\, dr d\varphi d\theta,$$

eftersom $\|x\| = r$ i sfäriska koordinater. Precis som tidigare handlar det om en separabel trippelintegral med värdet

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^3 \sin(\varphi)\, dr d\varphi d\theta \quad = \quad \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi}\underbrace{\int_0^{1} r^3\, dr}_{=\frac{1}{4}}\int_0^{\pi}\sin(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\underbrace{\left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\pi}}_{=2} = \pi,$$

och vi är klara.

4 Kapitel 67

4.1 Uppgift 6

Betrakta vektorfältet $u(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$*. Låt* Ω *vara skivan* $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x-a\| \leq 1\right\}$ *med utåtriktad normal* n*. Beräkna* $\int_\Gamma u \cdot n \, ds$ *för* $a = (2,\, 0)$ *samt* $a = 0$*. Kan divergenssatsen tillämpas?*

(a) $a = (2,\, 0)$

Integrationsområdet ges av

$$\|x-a\| \leq 1 \implies \left((x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2\right)^{1/2} \leq 1 \implies (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 \leq 1,$$

en cirkelskiva med radie 1 och centrum i punkten $(a_1,\, a_2)$. Kurvintegralen inbjuder till att använda divergenssatsen (den här gången med flödet genom en randkurva istället för en randyta)

$$\int_\Gamma u \cdot n \, ds = \int_\Omega \nabla \cdot u \, dx,$$

men vi minns att satsens förutsättningar måste vara uppfyllda. Klart är att Ω är slutet och begränsat, men u behöver dessutom vara en $\mathcal{C}^1$-funktion. För att ta reda på det kontrolleras förekomsten av singulariteter (punkter där u inte är kontinuerlig). Vi inser snart att u är kontinuerlig överallt, utom i origo (här blir funktionsvärdet ”oändligt” och u är inte definierad), och detsamma gäller för u:s partiella derivator. Alltså är förutsättningarna på vår sida — punkten $(0,\, 0)$ ligger inte i Ω — och man fortsätter enklast med att bestämma

$$\begin{aligned}\nabla \cdot u &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) + \left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) \\ &= \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = 0,\end{aligned}$$

och det framgår att kurvintegralen är noll (man brukar säga att fältet u är *källfritt* om $\nabla \cdot u = 0$ i hela definitionsmängden).

(b) $a = (0,\, 0)$

Här kan inte divergenssatsen tillämpas — origo fick inte ingå i definitionsmängden. Istället får vi lösa kurvintegralen som vanligt

$$\int_\Gamma u \cdot n \, ds = \int_\Omega u(s(t)) \cdot n(s(t)) \|s'(t)\| \, dt,$$

där en parametrisering av kurvan blir

$$\begin{cases} x_1 = \cos(t) \\ x_2 = \sin(t) \end{cases}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

med enhetsnormalen $n = (\cos(t), \sin(t))$. Eftersom $\|s'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos^2(t))} = 1$ följer således att

$$\int_\Gamma u \cdot n \, ds = \int_0^{2\pi} (\cos(t), \sin(t)) \cdot (\cos(t), \sin(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

vilket inte är noll.

4.2 Uppgift 7

Visa att om $\nabla \cdot u = 0$, och Γ, $\overline{\Gamma}$ kurvor med normaler enligt Figur 67.7, så är $\int_\Gamma u \cdot n \, ds = \int_{\overline{\Gamma}} u \cdot \overline{n} \, ds$.

De båda kurvstyckena sluter ett område på vilket divergenssatsen kan tillämpas. Med andra ord kan vi skriva

$$0 = \int_\Omega \nabla \cdot u \, dx = \{\text{divergenssatsen}\} = \int_\Gamma u \cdot n \, ds + \int_{\overline{\Gamma}} u \cdot (-\overline{n}) \, ds,$$

där normalen skall vara utåtriktad (måste byta tecken på $\overline{n}$). Men det medför också att, eftersom $u \cdot (-\overline{n}) = -u \cdot \overline{n}$, vad som påstås, nämligen

$$0 = \ldots = \int_\Gamma u \cdot n \, ds - \int_{\overline{\Gamma}} u \cdot \overline{n} \, ds \implies \int_\Gamma u \cdot n \, ds = \int_{\overline{\Gamma}} u \cdot \overline{n} \, ds,$$

och vi är klara.

4.3 Uppgift 9

Visa att fältet $u = e^{x_1 x_2}(1 + x_1 x_2, x_1^2)$ är rotationsfritt och finn en potential φ sådan att $u = \nabla\varphi$.

Att fältet är rotationsfritt innebär att $\nabla \times u = 0$, vilket vi konstaterar via

$$\nabla \times u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \left(2x_1 e^{x_1 x_2} + x_1^2 x_2 e^{x_1 x_2}\right) - \left(x_1 e^{x_1 x_2} + x_1 e^{x_1 x_2} + x_1^2 x_2 e^{x_1 x_2}\right) = 0.$$

När fältet är rotationsfritt, existerar det en potential φ, som bestäms av sambandet

$$u = \nabla\varphi.$$

Det leder oss till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = e^{x_1 x_2}(1 + x_1 x_2) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = x_1^2 e^{x_1 x_2} \end{cases},$$

där den andra ekvationen säger att

$$\varphi(x_1, x_2) = \int x_1^2 e^{x_1 x_2}\, dx_2 + C = x_1 e^{x_1 x_2} + f(x_1),$$

via integration. Notera att integrationskonstanten C blir en funktion av x_1 (konstant m.a.p. x_2), som nu ska modifieras så att även den första ekvationen uppfylls, genom insättning i vänsterledet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 e^{x_1 x_2} + f(x_1)\right) = e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2} + f'(x_1) = e^{x_1 x_2}(1 + x_1 x_2) + f'(x_1),$$

vilket ska vara detsamma som högerledet

$$e^{x_1 x_2}(1 + x_1 x_2) + f'(x_1) = e^{x_1 x_2}(1 + x_1 x_2) \implies f'(x_1) = 0 \implies f(x_1) = C.$$

Med $f(x_1)$ som en konstant ges potentialer till u av

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 e^{x_1 x_2} + C.$$

Andra benämningar på ett rotationsfritt fält är *konservativt fält* eller *potentialfält*.